120	**Endomorphismes symétriques d'un ev euclidien de dimension finie.**	Réduction des matrices symétriques réelles.	Monier MPSI et MP Grifone

Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un ev eucl, de dimension $n \geq 1$.

I. Endomorphismes symétriques. (1)

A. Définition, premières propriétés. (Mon MP)

Def 1: Soit f∈L(E). On dit que f est **symétrique** ssi:
$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
On note **S(E)** l'ensemble des edomph. symétriques de E.
S(E) est un sev de L(E).

Prop 1: On a:
1) $\forall f,g \in S(E),\quad (g\circ f\in S(E) \Leftrightarrow g\circ f = f\circ g)$
2) $\forall f\in S(E), \forall k\in\mathbb{N},\ f^k\in S(E)$
3) $\forall f\in S(E)\cap \underbrace{GL(E)}_{mat.inversibles},\ \forall k\in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}, f^k\in S(E)$

En particulier, l'inverse d'un endomph. symétrique (s'il est inversible) est symétrique.

Exples: proj.orthog. $\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et sym.orthog. $\begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}$ sont des endomorphismes symétriques.

B. Point de vue matriciel. (Mon. MPSI p.297)

Def 2: Une matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique** ssi ${}^tA = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ens. des mat. sym. réelles.
$S_n(\mathbb{R})$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$.

Prop 2: (Mon MP) Soit f∈L(E), de matrice M dans une BON.
$f\in S(E) \Leftrightarrow A\in S_n(\mathbb{R})$
Le vocabulaire matriciel et app. lin est cohérent.

Prop 3: $\forall (A,B)\in (S_n(\mathbb{R}))^2,\ (AB\in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow AB = BA)$
$\forall A\in S_n(\mathbb{R})\cap GL_n(\mathbb{R}),\ A^{-1}\in S_n(\mathbb{R})$
Attention, pour n≥2, $S_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable par ×.

II. Réduction des matrices symétriques réelles. (Mon.MP p.139)

Prop 4: Soit f∈S(E). Alors les **sous-espaces propres** pour f sont **orthogonaux entre eux**, c'est-à-dire:
Pour ttes val. ppes λ≠μ, et tous vect. ppes $\vec{x}$ (de λ) et $\vec{y}$ (de μ), on a $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0$.

Prop 5: Soit f∈S(E). Soit F sev de E.
F **stable** par f ⇒ $F^\perp$ stable par f.
Grifone p.249↴

Théorème fondamental: Soient $(E,\langle .,.\rangle)$ un ev eucl., et $f\in S(E)$.
1) f est **diagonalisable.**
2) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. En particulier, on peut construire une **BON de vecteurs propres** en choisissant une BON dans chaque espace propre.

Point de vue matriciel: Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans ℝ, et les esp. ppes sont deux à deux orthogonaux *(pour le pdt scal. canonique).*

Ecriture matricielle du th.: Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.
Il existe $P\in O_n(\mathbb{R})$ tq $A' = {}^tP.A.P$ est diagonale.
Une matrice symétrique ℂ peut ne pas être diag^ble.

Applications:
Caractérisation du pdt scalaire à l'aide de sa matrice:
Soient s une f.b.s. sur E, S sa matrice ds une base de E.
Alors s définit un pdt scal. ssi S a ttes ses val. ppes >0.
S_n^+: mat. positives de $S_n(\mathbb{R})$, S_n^{++}: def.posde $S_n(\mathbb{R})$
(Grifone p.250)↑
Racine carrée dans S_n^+: (Mon.MP ex.5.2.25 p.173)
$\forall S\in S_n^+,\ \exists! R\in S_n^+,\quad S = R^2$

Décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$: (ex.5.2.31)
$\forall A\in GL_n(\mathbb{R}), \exists!(\Omega,S)\in O_n(\mathbb{R})\times S_n^{++},\quad A=\Omega S$
Une telle décomposition existe dans $M_n(\mathbb{R})$, S est alors unique, mais Ω pas forcément.
Pour n=1 dans ℂ (HS ici), on retrouve $z = r.e^{i\theta}$, c'est dc une sorte de généralisation des coordonnées polaires.

Classification des quadriques (2): L'étude d'une quadrique à centre amène une matrice symétrique réelle, que l'on diagonalise grâce au th. fondamental. (Monier géométrie p.285).

III. Réduction simultanée.

Th 2: Réduction simultanée. Soit φ une **f.b.s.** sur E×E.
Il existe une BON de E dans laquelle φ est diagonale.
Quand on a une f.quad sur un ev eucl. E, il existe des bases qui sont orthogonales à la fois pour le pdt scal. de E et pour la forme quadratique.

Prop 6: Expression matricielle de la réduct° simultanée.
Soient $A\in S_n^{++}$, $B\in S_n(\mathbb{R})$, $\exists (P,D)\in GL_n(\mathbb{R})\times D_n(\mathbb{R})$
tq: $A = {}^tP.P$ et $B = {}^tP.D.P$.
D'où "simultanée". En général, P n'est pas orthogonale.

Exercice:
Soient A, B ∈ $S_n(\mathbb{R})$. Si A ∈ S_n^{++} et AB nilpotente, alors B=0. *(nilpotente: $\exists p\in\mathbb{N} : M^p = 0$)*

Application: (Grifone p.389) **Classification des coniques selon la signature de la forme quadratique associée.**
Conique: Soient q f. quad non nulle, φ forme lin. dur $\mathbb{R}^2$.
On appelle conique l'ens des v∈$\mathbb{R}^2$ tq:
$q(v)+\varphi(v) = k$, où k∈ℝ.

signature de q	(2,0)	(1,1)	(1,0)
conique	ellipse	hyperbole	parabole

IV. Notes.

(1) **Adjoint d'un endomph**: f* est l'adjoint de f ssi ∀x,y∈E, <f(x),y> = <x,f*(y)>.
F est **autoadjoint** ssi f* = f. C'est exactement la def° d'un endomph. symétrique (ds $\mathbb{R}$) – ou hermitienne ds $\mathbb{C}$ - .

(2) **Quadrique**: tte surface d'équation cartésienne $F\left(x, y, z\right) = 0$, où F est un polynôme de degré total 2.